



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

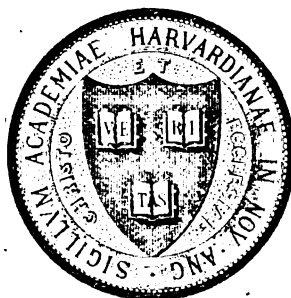
About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

Math
5858
32



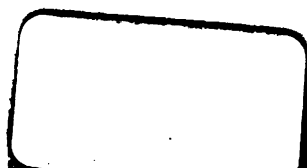
Math 5858.32

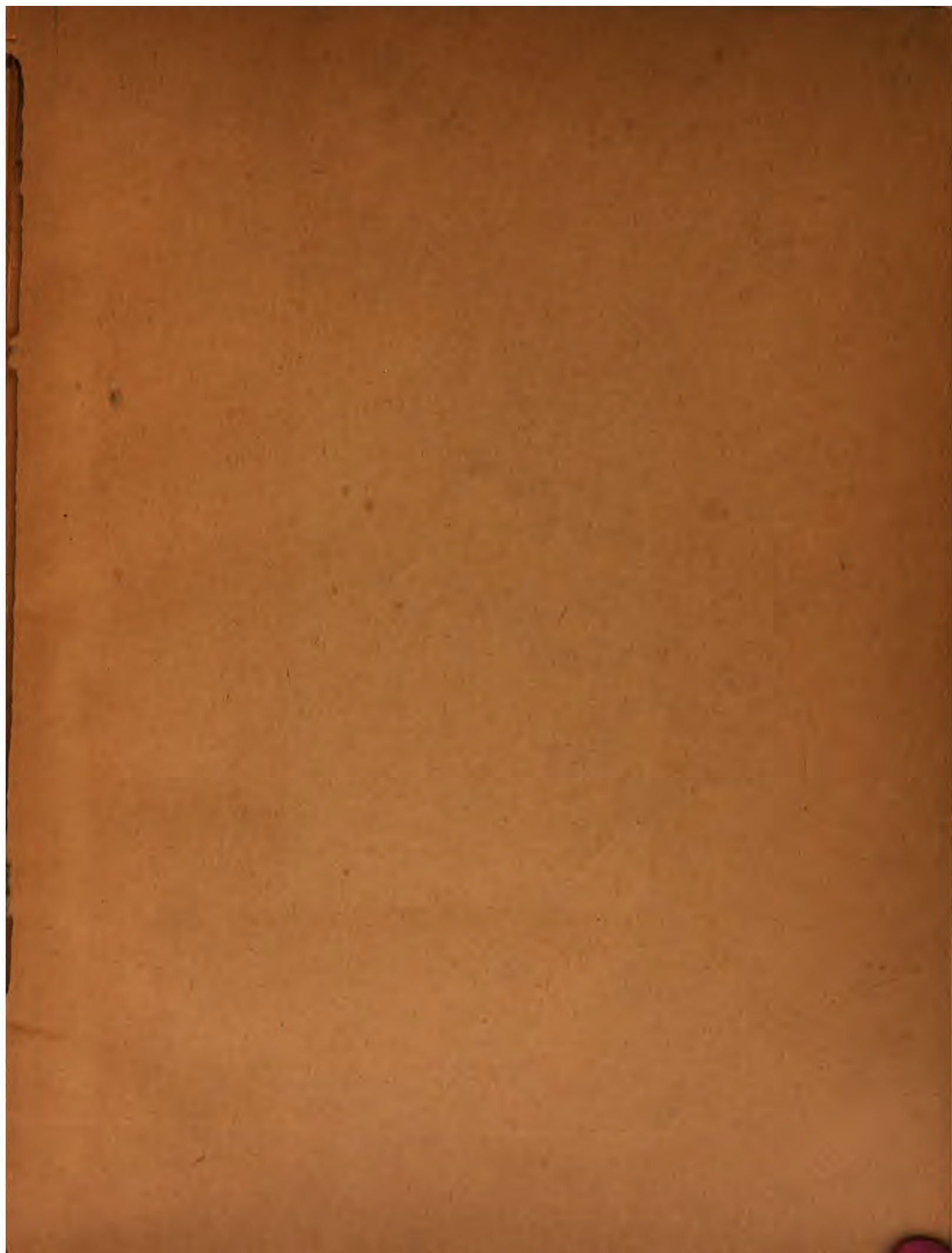


SCIENCE CENTER LIBRARY

FROM

Gratis





Corr

Math. 10. 10. 32. 7



AB UNIVERSITATE LITTERARUM REGIA HUNGARICA

FRANCISCO-JOSEPHINA KOLOZSVÁRIENSI

DONO DATUM.

NS.



IOANNIS BÖLYAI DE BÖLYA

APPENDIX

SCIENTIAM SPATII ABSOLUTE VERAM EXHIBENS.

0

IOANNIS BOLYAI DE BOLYA APPENDIX

SCIENTIAM SPATII ABSOLUTE VERAM EXHIBENS: A VERITATE AUT FALSITATE
AXIOMATIS XI. EUCLIDEI, A PRIORI HAUD UNQUAM DECIDENDA, INDEPENDENTEM:
ADIECTA AD CASUM FALSITATIS QUADRATURA CIRCULI GEOMETRICA.

EDITIO NOVA

OBLATA AB ACADEMIA SCIENTIARUM HUNGARICA
AD DIEM NATALEM CENTESIMUM AUCTORIS CONCELEBRANDUM.

EDIDERUNT

IOSEPHUS KÜRSCHÁK MAURITIUS RÉTHY

BÉLA TÓTÖSSY DE ZEPETHNEK

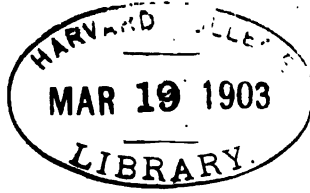
ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ SODALES.

BUDAPESTINI.

SUMPTIBUS ACADEMIÆ SCIENTIARUM HUNGARICÆ.

MDCCCCL.

5058.32
Math 5038.32.7
✓



INDEX TABULARUM

ET, PAGINARUM, QUIBUS FIGURÆ TABULARUM TRACTANTUR.

Tab.	Fig.	Pag.	Tab.	Fig.	Pag.	Tab.	Fig.	Pag.
I.	1	3	III.	8	8	V.	14	15
	1	4		9	11		14	24
	2	3		9	22		14	29
	2	4		10	13		14	33
	3	4		10	23		15	16
	4	5		10	28		15	32
II.	5	5	IV.	11	13		15	33
	5	9		12	14	VI.	16	18
	5	10		12	21		17	20
	6	6		12	24		18	27
	6	11		12	27	VII.	19	29
	7	6		13	15		20	30
	7	9					21	31
	7	10					22	31
	7	28					23	34

A P P E N D I X.

**SCIENTIAM SPATII *absolute veram* exhibens :
a veritate aut falsitate Axiomatis XI Euclidei
(a priori haud unquam decidenda) in-
dependentem; adjecta ad casum fal-
sitatis, quadratura circuli
*geometrica.***

**Auctore JOHANNE BOLYAI de eadem, Geometrarum
in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Ca-
stronsium Capitaneo.**

EXPLICATIO SIGNORUM.

- \overline{ab} denotet complexum *omnium* punctorum cum punctis a, b in recta sitorum.
- \overline{ab} • rectæ \overline{ab} in a bifariam sectæ dimidium illud, quod punctum b complectitur.
- \overline{abc} • complexum *omnium* punctorum, quæ cum punctis a, b, c (non in eadem recta sitis) in eodem plano sunt.
- $ab\tilde{c}$ • plani \overline{abc} per \overline{ab} bifariam secti dimidium, punctum c complectens.
- abc • portionum, in quas \overline{abc} per complexum rectarum $b\tilde{a}, b\tilde{c}$ dividitur, *minorem*; sive *angulum*, cuius $b\tilde{a}, b\tilde{c}$ crura sunt.
- $abcd$ • (si d in abc sit et $b\tilde{a}, c\tilde{d}$ se invicem non secent) portionem ipsius abc inter $b\tilde{a}, b\tilde{c}, c\tilde{d}$ comprehensam; $bac\tilde{d}$ vero portionem plani \overline{abc} inter $\overline{ab}, c\tilde{d}$ sitam.
- R • angulum rectum.
- $ab \triangleq cd$ • $cab = acd$.
- \equiv • congruens.*
- $x \rightsquigarrow a$ • x tendere ad limitem a .
- $\bigcirc r$ • peripheriam circuli radii r .
- $\odot r$ • aream circuli radii r .

* Sit fas, signo hocce, quo summus Geometra GAUSS numeros congruos insignivit, congruentiam geometricam quoque denotare: nulla ambiguitate exinde metuenda.

§. 1.

Si rectam am non secet plani eiusdem recta bn , at secet quævis $b\tilde{p}$ Fig. 1.
(in abn): designetur hoc per

$$bn \parallel am.$$

Dari talem $b\tilde{f}$, et quidem *unicam*, e quovis puncto b (extra am),
atque

$$bam + abn \text{ non } > 2R$$

esse patet; nam bc circa b mota, donec

$$bam + abc = 2R$$

fiat, $b\tilde{c}$ aliquando *primo* non secatur am , estque tunc $bc \parallel am$.

Nec non patet esse $bn \parallel em$, ubivis sit e in am (supponendo in omnibus talibus casibus esse $am > ae$).

Et si, puncto c in am abeunte in infinitum, semper sit $cd = cb$: erit semper

$$cdb = (cbd < nbc);$$

ast $nbc \rightarrow 0$; adeoque et $adb \rightarrow 0$.

§. 2.

Si $bn \parallel am$; *est quoque* $cn \parallel am$.

Fig. 2.

Nam sit d ubicunque in $macn$. Si c in $b\tilde{f}$ sit; $b\tilde{d}$ secatur am (propter $bn \parallel am$), adeoque et $c\tilde{d}$ secatur am ; si vero c in $b\tilde{p}$ fuerit; sit $bq \parallel c\tilde{d}$: cadit $b\tilde{q}$ in abn (§. 1.) secaturque am , adeoque et $c\tilde{d}$ secatur am . Quævis $c\tilde{d}$ igitur (in acn) secatur in utroque casu am absque eo, ut $c\tilde{f}$ ipsam am secet. Est ergo semper $cn \parallel am$.

§. 3.

Fig. 2. Si tam br quam cs sit $\parallel am$, et c non sit in \overline{br} ; tum $b\overline{r}$, $c\overline{s}$ se invicem haud secant.

Si enim $b\overline{r}$, $c\overline{s}$ punctum d commune haberent; (per §. 2.) essent dr et ds simul $\parallel am$, caderetque (§. 1.) $d\overline{s}$ in $d\overline{r}$ et c in \overline{br} (contra hyp.).

§. 4.

Fig. 3. Si $man > mab$; pro quovis puncto b ipsius $a\overline{b}$ datur tale c in $a\overline{m}$, ut sit $bcm = nam$.

Nam datur (per §. 1.) $b\overline{dm} > nam$, adeoque $m\overline{dp} = man$, caditque b in $n\overline{adp}$. Si igitur nam iuxta am feratur, usquequo $a\overline{m}$ in $d\overline{p}$ veniat; aliquando $a\overline{m}$ per b transiisse, et aliquod $bcm = nam$ esse oportet.

§. 5.

Fig. 1. Si $bn \parallel am$, datur tale punctum f in $a\overline{m}$, ut sit $f\overline{m} \triangleq bn$.

Nam (per §. 1.) datur $bcm > cbn$; et si $ce = cb$, adeoque $ec \triangleq bc$; patet esse $bem < ebn$. Feratur p per ec , angulo bpm semper u , et angulo pbn semper v dicto; patet u esse prius ei simultaneo v minus, posterius vero esse maius. Crescit vero u a bem usque bcm continuo; cum (per §. 4.) nullus angulus $> bem$ et $< bcm$ detur, cui u aliquando $=$ non fiat; pariter decrescit v ab ebn usque cbn continuo: datur itaque in ec tale f , ut $b\overline{fm} = f\overline{bn}$ sit.

§. 6.

Si $bn \parallel am$, atque ubivis sit e in $a\overline{m}$ et g in \overline{bn} : tum $gn \parallel em$ et $em \parallel gn$.

Nam (per §. 1.) est $bn \parallel em$, et hinc (per §. 2.) $gn \parallel em$.

Si porro $f\overline{m} \triangleq bn$ (§. 5.); tum $m\overline{f}bn = n\overline{b}fm$, adeoque (cum $bn \parallel fm$ sit) etiam $f\overline{m} \parallel bn$, et (per præc.) $em \parallel gn$.

§. 7.

Si tam bn quam cp sit $\parallel am$, et c non sit in \overline{bn} : est etiam $bn \parallel cp$. Fig. 4.

Nam $b\overline{n}$, $c\overline{p}$ se invicem non secant (§. 3.); sunt vero am , bn , cp aut in plano, aut non; atque in casu primo am aut in $bncp$ est, aut non.

Si am , bn , cp in plano sint, et am in $bncp$ cadat; tum quævis $b\overline{q}$ (in nbc) secat \overline{am} in aliquo puncto d (quia $bn \parallel am$); porro cum $dm \parallel cp$ sit (§. 6.), patet $d\overline{q}$ secare $c\overline{p}$, adeoque esse $bn \parallel cp$.

Si vero bn , cp in eadem plaga ipsius am sint; tum aliqua earum ex. gr. cp intra duas reliquas \overline{bn} , \overline{am} cadit; quævis $b\overline{q}$ (in nba) autem secat \overline{am} , adeoque et ipsam $c\overline{p}$. Est itaque $bn \parallel cp$.

Si mab , mac *angulum* efficiant: tum $c\overline{bn}$ cum $a\overline{bn}$ nonnisi $b\overline{n}$, $a\overline{m}$ vero (in abn) cum $b\overline{n}$, adeoque nbc quoque cum $a\overline{m}$, nihil commune habent. Per quamvis $b\overline{d}$ (in nba) autem positum $b\overline{c}\overline{d}$ secat $a\overline{m}$, quia (propter $bn \parallel am$) $b\overline{d}$ secat $a\overline{m}$. Moto itaque $b\overline{c}\overline{d}$ circa bc , donec ipsam $a\overline{m}$ *prima vice* deserat, postremo cadet $b\overline{c}\overline{d}$ in $b\overline{c}\overline{n}$. Eadem ratione cadet idem in $b\overline{c}\overline{p}$; cadit igitur bn in bcp . Porro si $br \parallel cp$; tum (quia etiam $am \parallel cp$) pari ratione cadit br in bam ; nec non (propter $br \parallel cp$) in bcp . Itaque $b\overline{r}$ ipsis mab , pcb commune, nempe ipsum $b\overline{n}$ est, atque hinc $bn \parallel cp$.

Si igitur $cp \parallel am$, et b extra \overline{cam} sit: tum sectio ipsorum bam , bcp , nempe $b\overline{n}$ est \parallel tam ad am , quam ad cp .*

§. 8.

*Si $bn \parallel$ et $\perp cp$ (vel brevius $bn \parallel \perp cp$), atque am (in nbc) *rectam* bc *perpendiculariter bisecet*; tum $bn \parallel am$.* Fig. 5.

Si enim $b\overline{n}$ secaret $a\overline{m}$, etiam $c\overline{p}$ secaret $a\overline{m}$ in eodem puncto (cum $mabn = macp$), quod et ipsis $b\overline{n}$, $c\overline{p}$ commune esset, quamvis $bn \parallel cp$ sit. Quævis $b\overline{q}$ (in $c\overline{bn}$) vero secat $c\overline{p}$; adeoque secat $b\overline{q}$ etiam $a\overline{m}$. Consequenter $bn \parallel am$.

* Casu tertio *praemisso* duo priores, adinstar casus secundi §. 10. brevius ac elegantius simul absolvi possunt. (Ed. I. Tom. I. Errata Appendicis).

§. 9.

Fig. 6. Si $bn \parallel am$, $map \perp mab$, atque *angulus, quem* nbd cum nba (in ea plaga ipsius $mabn$, ubi map est) *facit, sit* $< R$: tum map et nbd se invicem secant.

Nam sit

$$bam = R, \text{ ac } \perp bn$$

(sive in b cadat c , sive non), et

$$ce \perp bn \text{ (in } nbd);$$

erit (per hyp.) $ace < R$, et $af (\perp ce)$ in ace cadet. Sit $a\tilde{p}$ sectio (punctum a commune habentium) $ab\tilde{f}$ et $am\tilde{p}$; erit

$$bap = bam = R$$

(cum sit $bam \perp map$). Si denique $ab\tilde{f}$ in $ab\tilde{m}$ ponatur (a et b manentibus); cadet $a\tilde{p}$ in $a\tilde{m}$; atque cum

$$ac \perp bn \text{ et } af < ac$$

sit, patet af *intra* $b\tilde{m}$ terminari, adeoque bf in abn cadere. Secat autem $b\tilde{f}$ ipsam $a\tilde{p}$ in *hoc* situ (quia $bn \parallel am$), adeoque etiam in situ *primo* $a\tilde{p}$ et $b\tilde{f}$ se invicem secant; estque punctum sectionis ipsis map et nbd commune: secant itaque map et nbd se invicem.

Facile exhinc sequitur map et nbd se mutuo secare, si summa interiorum, quos cum $mabn$ efficiunt, $< 2R$ sit.

§. 10.

Fig. 7. Si tam bn quam cp sit $\parallel \simeq am$; est etiam $bn \parallel \simeq cp$.

Nam mab et mac aut *angulum* efficiunt, aut in plano sunt.

Si prius; bisecet \overline{qdf} rectam ab perpendiculariter; erit $dq \perp ab$, adeoque $dq \parallel am$ (§. 8.); pariter si \overline{ers} bisecet rectam ac perpendiculariter, est $er \parallel am$; unde $dq \parallel er$ (§. 7.). Facile hinc (per §. 9.) consequitur, \overline{qdf}

et \overline{rs} se mutuo secare, et sectionem \overline{fs} esse $\parallel \delta q$ (§. 7.), atque (propter $bn \parallel \delta q$) esse etiam

$$\overline{fs} \parallel bn.$$

Est porro (pro quovis puncto ipsius \overline{fs})

$$fb = fa = fc,$$

caditque \overline{fs} in planum \overline{tgf} , rectam bc perpendiculariter bisecans. Est vero (per §. 7.) (cum sit $\overline{fs} \parallel bn$) etiam

$$gt \parallel bn.$$

Pari modo demonstratur $gt \parallel cp$ esse. Interim gt bisecat rectam bc perpendiculariter; adeoque $tgbn = tgcp$ (§. 1.) et

$$bn \parallel \triangle cp.$$

Si bn , am , cp in plano sint; sit (*extra hoc planum cadens*) $\overline{fs} \parallel \triangle am$; tum (per præc.) $\overline{fs} \parallel \triangle$ tam ad bn quam ad cp , adeoque et $bn \parallel \triangle cp$.

§. 11.

Complexus puncti a , atque *omnium* punctorum, quorum quodvis b tale est, ut si $bn \parallel am$ sit, sit etiam $bn \triangle am$; dicatur F : sectio vero ipsius F cum quovis plano rectam am complectente nominetur L .

In quavis recta, quæ $\parallel am$ est, F gaudet puncto, et nonnisi uno; atque patet L per am dividi in duas partes congruentes; dicatur am *axis* ipsius L ; patet etiam, in quovis plano rectam am complectente, pro *axe* am unicum L dari. Quodvis eiusmodi L , dicatur L *ipsius* am (in plano, de quo agitur, intelligendo). Patet per L circa am revolutum, F describi, cuius am *axis* vocetur, et vicissim F *axi* am *attribuatur*.

§. 12.

Si b ubivis in L ipsius am fuerit, et $bn \parallel \triangle am$ (§. 11.); tum L ipsius am et L ipsius bn coincidunt.

Nam dicatur L ipsius $b\bar{n}$ distinctionis ergo l ; sitque c ubivis in l , et $cp \parallel \triangleleft bn$ (§. 11.); erit (cum et $bn \parallel \triangleleft am$ sit) $cp \parallel \triangleleft am$ (§. 10.), adeoque c etiam in L cadet. Et si c ubivis in L sit, et $cp \parallel \triangleleft am$; tum $cp \parallel \triangleleft bn$ (§. 10.); caditque c etiam in l (§. 11.). Itaque L et l sunt eadem; ac quævis $b\bar{n}$ est etiam axis ipsius L , et inter omnes axes ipsius L , \triangleleft est.

Idem de F eodem modo patet.

§. 13.

Fig. 8. Si $bn \parallel am$, $cp \parallel dq$, et $bam + abn = 2R$ sit; tum etiam $dcp + cdq = 2R$.
Sit enim $ea = eb$ et $efm = dcp$ (§. 4.); erit (cum

$$\text{sit) } bam + abn = 2R = abn + abg$$

$$ebg = eaf;$$

adeoque si etiam $bg = af$ sit,

$$\triangle ebg = \triangle eaf, \text{ } beg = aef,$$

cadetque g in $f\bar{e}$. Est porro $gfm + fgn = 2R$ (quia $egb = efa$). Est etiam $gn \parallel fm$ (§. 6.); itaque si $m\bar{f}rs = pcdq$, tum $rs \parallel gn$ (§. 7.), et r in vel extra fg cadit (si cd non $= fg$, ubi res iam patet).

I. In casu primo est frs non $> (2R - rfm = fgn)$, quia $rs \parallel fm$; ast cum $rs \parallel gn$ sit, est etiam frs non $< fgn$; adeoque $frs = fgn$, et

$$rfm + frs = gfm + fgn = 2R.$$

Itaque et $dcp + cdq = 2R$.

II. Si r extra fg cadat; tunc $ngr = m\bar{f}r$, sitque $mfgn = ng\bar{h}l = lh\bar{f}o$ et ita porro, usquequo $f\bar{f} =$ vel prima vice $> fr$ fiat. Est heic $fo \parallel hl \parallel fm$ (§. 7.). Si f in r cadat; tum fo in rs cadit (§. 1.); adeoque

$$rfm + frs = f\bar{f}m + f\bar{f}o = f\bar{f}m + fgn = 2R;$$

si vero r in $h\bar{f}$ cadat, tum (per I.) est

$$rhl + hrs = 2R = rfm + frs = dcp + cdq.$$

§. 14.

Si $bn \parallel am$, $cp \parallel dq$, et $bam + abn < 2R$ sit; tum etiam $dcp + cdq < 2R$.

Si enim $dcp + cdq$ non esset $<$, adeoque (per §. 1.) esset $= 2R$; tum (per §. 13.) etiam $bam + abn = 2R$ esset (contra hyp.).

§. 15.

Perpensis §§. 13. et 14. *Systema Geometriae hypothesei veritatis Axiomatis Euclidei XI. insistens dicatur Σ ; et hypothesei contrariae superstructum sit S . Omnia, quae expresse non dicuntur, in Σ vel in S esse; absolute enuntiari, i. e. illa, sive Σ sive S reipsa sit, vera asseri intelligatur.*

§. 16.

Si am sit axis alicuius L ; tum L in Σ recta $\perp am$ est.

Fig. 5.

Nam sit e quovis puncto b ipsius L axis bn ; erit in Σ

$$bam + abn = 2bam = 2R,$$

adeoque $bam = R$. Et si c quodvis punctum in \widetilde{ab} sit, atque $cp \parallel am$; est (per §. 13.) $cp \perp am$, adeoque c in L (§. 11.).

In S vero nulla 3 puncta a, b, c ipsius L vel F in recta sunt.

Nam aliquis axium am, bn, cp (ex. gr. am) intra duos reliquos cadit; et tunc (per §. 14.) tam bam quam $cam < R$.

§. 17.

L est etiam in S linea, et F superficies.

Fig. 7.

Nam (per §. 11.) quodvis planum ad axem am (per punctum aliquod ipsius F) perpendiculare secat ipsum F in peripheria circuli, cuius planum (per §. 14.) ad nullum alium axem bfi perpendiculare est. Revolvatur F circa bn ; manebit (per §. 12.) quodvis punctum ipsius F in F , et sectio ipsius F cum plano ad bfi non perpendiculari describet super-

ficiem: atqui F (per §. 12.), quaecunque puncta a, b fuerint in eo, ita sibi congruere poterit, ut a in b cadat; est igitur F superficies uniformis.

Patet hinc (per §§. 11. et 12.) L esse lineam uniformem.*

§. 18.

Fig. 7. Cuiusvis plani, per punctum a ipsius F ad axem am oblique positi, sectio cum F in S periphæria circuli est.

Nam sint a, b, c 3 puncta huius sectionis, et bn, cp axes; facient $ambn, amcp$ angulum; nam secus planum (ex §. 16.) per a, b, c determinatum ipsam am complecteretur (contra hyp.). Plana igitur, rectas ab, ac perpendiculariter bisecantia se mutuo secant (§. 10.) in aliquo axe fs (ipsius F), atque $fb = fa = fc$. Sit $ah \perp fs$, et revolvatur fah circa fs ; describet a periphæriam radii ha , per b et c euntem, et simul in F et \overline{abc} sitam; nec F et \overline{abc} præter $\bigcirc ha$ quidquam commune habent (§. 16.).

Patet etiam extremitate portionis fa lineæ L (tanquam radio) in F circa f mota ipsam $\bigcirc ha$ describi.

§. 19.

Fig. 5. Perpendicularis bt ad axem bn ipsius L (in planum ipsius L cadens) est in S tangens ipsius L .

Nam L in bt præter b nullo puncto gaudet (§. 14.), si vero bq in tbn cadat, tum centrum sectionis plani per bq ad tbn perpendicularis cum F ipsius $bñ$ (§. 18.) manifesto in bq locatur, et si bq diameter sit, patet bq lineam L ipsius $bñ$ in q secare.

§. 20.

Per quaevis duo puncta in F linea L determinatur (§§. 11. et 18.); atque (cum ex §§. 16. et 19. L perpendicularis ad omnes suos axes sit)

* Demonstrationem ad S restringere haud necesse est; quum facile ita proponatur, ut absolute (pro S et Σ) valeat. (Ed. I. Tom. I. Errata Appendicis).

quivis angulus Llineus in F angulo planorum ad F per crura perpendicularium aequalis est.

§. 21.

Duae lineae Lformes $a\bar{p}$, $b\bar{d}$ in eodem F, cum tertia Lformi ab Fig. 6.
summam internorum $< 2R$ efficientes, se mutuo secant (per $a\bar{p}$ in F intelligendo L per a, p ductum, per $a\bar{p}$ vero dimidium illud eius ex a incipiens, in quod p cadit).

Nam si $a\bar{m}$, $b\bar{n}$ axes ipsius F sint; tum $a\bar{m}\bar{p}$, $b\bar{n}\bar{d}$ secant se invicem (§. 9.); atque F secat eorundem sectionem (per §§. 7. et 11.); adeoque et $a\bar{p}$, $b\bar{d}$ se mutuo secant.

Patet exhinc Axioma XI. et omnia, quæ in Geometria Trigonometrica-que (plana) asseruntur, absolute constare in F, rectarum vices lineis L subeuntibus: idcirco functiones trigonometricæ abhinc eodem sensu accipientur, quo in Σ' veniunt; et peripheria circuli, cuius radius Lformis $= r$ in F, est $= 2\pi r$, et pariter $\odot r$ (in F) $= \pi r^2$ (per π intelligendo $\frac{1}{2} \odot 1$ in F, sive notum 3.1415926 . . .).

§. 22.

Si $a\bar{b}$ fuerit L ipsius $a\bar{m}$, et c in $a\bar{m}$; atque angulus cab (e recta Fig. 9.
 $a\bar{m}$ et Lformi linea $a\bar{b}$ compositus) feratur prius iuxta $a\bar{b}$, tum iuxta $b\bar{a}$ semper porro in infinitum: erit via $c\bar{d}$ ipsius c linea L ipsius $c\bar{m}$.

Nam (posteriore l dicta) sit punctum quodvis d in $c\bar{d}$, $d\bar{n} \parallel c\bar{m}$, et b punctum ipsius L in $d\bar{n}$ cadens; erit $b\bar{n} \triangle a\bar{m}$, et $ac = b\bar{d}$, adeoque $d\bar{n} \triangle c\bar{m}$, consequ. d in l. Si vero d in l et $d\bar{n} \parallel c\bar{m}$, atque b punctum ipsius L ipsi $d\bar{n}$ commune sit; erit $a\bar{m} \triangle b\bar{n}$ et $c\bar{m} \triangle d\bar{n}$, unde manifesto $b\bar{d} = ac$, cadetque d in viam puncti c, et sunt l et $c\bar{d}$ eadem. Designetur tale l per $l \parallel L$.

§. 23.

Si linea Lformis $c\bar{d}\bar{f} \parallel a\bar{b}e$ (§. 22.), et $ab = be$, atque $a\bar{m}$, $b\bar{n}$, $e\bar{p}$ sint Fig. 9.
axes; erit manifesto $c\bar{d} = d\bar{f}$; et si quælibet 3 puncta a, b, e fuerint ipsius

\overline{ab} , ac $ab = n \cdot cd$: erit quoque $ae = n \cdot cf$; adeoque (manifesto etiam pro ab , ae , dc incommensurabilibus)

$$ab : cd = ae : cf,$$

estque $ab : cd$ ab ab *independens* et per ac *prorsus determinatum*. Denotetur quotus iste, nempe $ab : cd$ litera maiore eiusdem nominis (puta per X), quo ac litera minuscula (ex. gr. x) insignitur.

§. 24.

Quaecunque x et y fuerint; est $Y = X^{\frac{y}{x}}$ (§. 23.).

Nam aut erit alterum (ipsorum x , y) multipulum alterius (ex. gr. y ipsius x), aut non.

Si $y = nx$; sit $x = ac = cg = gh$ & usquequo $ah = y$ fiat; sit porro $cd \parallel gf \parallel hl$; erit (§. 23.)

$$X = ab : cd = cd : gf = gf : hl;$$

adeoque

$$\frac{ab}{hl} = \left(\frac{ab}{cd} \right)^n,$$

sive

$$Y = X^n = X^{\frac{y}{x}}.$$

Si x , y multipla ipsius i sint, puta

$$x = mi \quad \text{et} \quad y = ni;$$

est (per præc.)

$$X = I^m, \quad Y = I^n,$$

consequ.

$$Y = X^{\frac{n}{m}} = X^{\frac{y}{x}}.$$

Idem ad casum incommensurabilitatis ipsorum x , y facile extenditur. Si vero fuerit $q = y - x$; erit manifesto $Q = Y : X$.

Nec non manifestum est, in Σ pro quovis x esse $X = 1$, in S vero $X > 1$ esse, atque pro *quibusvis* ab , abe dari tale $cdf \parallel abe$, ut sit $cdf = ab$,

unde $\text{ambn} = \text{amep}$ erit, etsi hoc illius qualevis multiplum sit; quod singulare quidem est, sed absurditatem ipsius S evidenter non probat.

§. 25.

In quovis rectilineo triangulo sunt peripheriae radiorum lateribus aequalium, uti sinus angulorum oppositorum. Fig. 10.

Sit enim $\text{abc} = R$, et $\text{am} \perp \text{bac}$, atque sint bn , $\text{cp} \parallel \text{am}$; erit $\text{cab} \perp \text{ambn}$, adeoque (cum $\text{cb} \perp \text{ba}$ sit) $\text{cb} \perp \text{ambn}$, consequ. $\text{cpbn} \perp \text{ambn}$. Secet F ipsius cp rectas bn , am (respective) in d , e , et fascias cpbn , cpam , bnam in lineis L formibus cd , ce , de ; erit (§. 20.) $\text{cd} = \text{angulo ipsorum } \text{ndc}$, nde , adeoque $= R$; atque pari ratione est $\text{ced} = \text{cab}$.

Est autem (per §. 21.) in L lineo triangulo ced (heic radio semper $= 1$ posito)

$$\text{ec} : \text{dc} = 1 : \sin. \text{dec} = 1 : \sin. \text{cab}.$$

Est quoque (per §. 21.)

$$\begin{aligned} \text{ec} : \text{dc} &= \odot \text{ec} : \odot \text{dc} \text{ (in } F) \\ &= \odot \text{ac} : \odot \text{bc} \text{ (§. 18.);} \end{aligned}$$

adeoque est etiam

$$\odot \text{ac} : \odot \text{bc} = 1 : \sin. \text{cab};$$

unde assertum pro quovis triangulo liquet.

§. 26.

In quovis sphaerico triangulo sunt sinus laterum, uti sinus angulorum iisdem oppositorum. Fig. 11.

Nam sit $\text{abc} = R$, et ced perpendiculare ad sphæræ radius oa ; erit $\text{ced} \perp \text{aob}$, et (cum etiam $\text{boc} \perp \text{boa}$ sit) $\text{cd} \perp \text{ob}$. In triangulis ceo , cdo vero est (per §. 25.)

$$\begin{aligned} \odot \text{ec} : \odot \text{oc} : \odot \text{dc} &= \sin. \text{coe} : 1 : \sin. \text{cod} \\ &= \sin. \text{ac} : 1 : \sin. \text{bc}; \end{aligned}$$

interim (§. 25.) etiam

itaque
 $\circ ec : \circ dc = \sin. cde : \sin. ced;$
 $\sin. ac : \sin. bc = \sin. cde : \sin. ced;$
 est vero $cde = R = cba$, atque $ced = cab$. Consequenter
 $\sin. ac : \sin. bc = 1 : \sin. a.$

E quo promanans Trigonometria sphaerica ab Axiomate XI. independenter stabilita est.

§. 27.

Fig. 12. Si ac, bd sint $\perp ab$, et feratur cab iuxta \overline{ab} ; erit (via puncti c dicta heic cd)

$$cd : ab = \sin. u : \sin. v.$$

Nam sit $de \perp ca$; est in triangulis ade, adb (per §. 25.)

$$\circ ed : \circ ad : \circ ab = \sin. u : 1 : \sin. v.$$

Revoluto $bacd$ circa ac , describetur $\circ ab$ per b , $\circ ed$ per d ; et via dictæ cd denotetur heic per $\odot cd$. Sit porro polygonum quodvis $bfg \dots$ ipsi $\odot ab$ inscriptum; nascetur per plana ex omnibus lateribus $bf, fg \&$, ad $\odot ab$ perpendicularia, in $\odot cd$ quoque figura polygonalis totidem laterum; et demonstrari (ad instar §. 23.) potest, esse

$$cd : ab = dh : bf = hf : fg = \dots,$$

adeoque

$$dh + hf + \dots : bf + fg + \dots = cd : ab$$

Quovis laterum bf, fg, \dots ad limitem 0 tendente, manifesto

$$bf + fg + \dots \curvearrowright \circ ab \quad \text{et} \quad dh + hf + \dots \curvearrowright \circ ed.$$

Itaque etiam

$$\circ ed : \circ ab = cd : ab.$$

Erat vero

$$\circ ed : \circ ab = \sin. u : \sin. v.$$

Consequ.

$$cd : ab = \sin. u : \sin. v.$$

Remoto ac a bd in infinitum, manet

$$cd:ab$$

adeoque etiam

$$\sin. u : \sin. v$$

constans; u vero $\sphericalangle R$ (§. 1.), et si $dm \parallel bu$ sit, $v \sphericalangle x$; unde fit

$$cd:ab = 1:\sin. x.$$

Via dicta cd denotabitur per $cd \parallel ab$.

§. 28.

Si $bn \parallel am$, *et* c *in* am , *atque* $ac = x$ *sit: erit* X (§. 23.)

Fig. 13.

$$= \sin. u : \sin. v.$$

Nam si cd et ae sint $\perp bn$ et $bf \perp am$; erit (ad instar §. 27.)

$$\odot bf : \odot cd = \sin. u : \sin. v.$$

Est autem evidenter $bf = ae$: quamobrem

$$\odot ea : \odot dc = \sin. u : \sin. v.$$

In superficiebus vero F formibus ipsorum am et cm (ipsum $ambn$ in ab et cg secantibus) est (per §. 21.)

$$\odot ea : \odot dc = ab:cg = X.$$

Est itaque etiam

$$X = \sin. u : \sin. v.$$

§. 29.

Si $bam = R$, $ab = y$, *et* $bn \parallel am$ *sit; erit in* S

Fig. 14.

$$Y = \cot. \frac{1}{2} u.$$

Nam si fuerit $ab=ac$, et $cp \parallel am$ (adeoque $bn \parallel \simeq cp$), atque $pcd=qcd$; datur (§. 19.) $\delta s \perp c\tilde{d}$, ut $\delta s \parallel cp$, adeoque (§. 1.) $\delta t \parallel cq$ sit. Si porro $be \perp \delta s$; erit (§. 7.) $\delta s \parallel bn$, adeoque (§. 6.) $bn \parallel es$, et (cum $\delta t \parallel cq$ sit) $bq \parallel et$; consequ. (§. 1.) $ebn=ebq$.

Repræsententur, bcf ex L ipsius bn , et $fg, \delta h, cf$ et el ex L formibus lineis ipsorum $ft, \delta t, cq$ et et ; erit evidenter (§. 22.)

$$\text{itaque} \quad hg = \delta f = \delta t = hc;$$

$$\text{Pariter patet} \quad cq = 2ch = 2v.$$

$$\text{esse. Est vero} \quad bg = 2bl = 2z$$

$$\text{quapropter} \quad bc = bg - cq;$$

$$\text{adeoque (§. 24.)} \quad y = z - v,$$

$$\text{Est demum (§. 28.)} \quad Y = Z:V.$$

$$Z = 1 : \sin. \frac{1}{2} u \quad \text{et} \quad V = 1 : \sin. \left(R - \frac{1}{2} u \right),$$

consequ.

$$Y = \cot. \frac{1}{2} u.$$

§. 30.

Fig. 15. Verumtamen facile (ex §. 25.) patet, resolutionem problematis *Trigonometriæ planæ* in S , peripheriæ per radium expressæ indigere; hoc vero rectificatione ipsius L obtineri potest.

Sint $ab, cm, c'm' \perp a\tilde{c}$, atque b ubivis in $a\tilde{b}$; erit (§. 25.)

$$\text{et} \quad \sin. u : \sin. v = \odot p : \odot y$$

$$\text{adeoque} \quad \sin. u' : \sin. v' = \odot p : \odot y';$$

$$\frac{\sin. u}{\sin. v} \odot = \frac{\sin. u'}{\sin. v'} \odot y'.$$

Est vero (per §. 27.)

consequ. $\sin. v : \sin. v' = \cos. u : \cos. u';$

$$\frac{\sin. u}{\cos. u} \circ y = \frac{\sin. u'}{\cos. u'} \circ y',$$

seu

$$\circ y : \circ y' = \text{tang. } u' : \text{tang. } u = \text{tang. } w : \text{tang. } w'.$$

Sint porro $cn \parallel ab$, $c'n' \parallel ab$ et cd , $c'd'$ lineæ L formes ad \overline{ab} perpendiculares; erit (§. 21.) etiam

$$\circ y : \circ y' = r : r',$$

adeoque

$$r : r' = \text{tang. } w : \text{tang. } w'.$$

Crescat iam p ab a incipiendo in infinitum; tum $w \rightsquigarrow z$ et $w' \rightsquigarrow z'$; quapropter etiam

$$r : r' = \text{tang. } z : \text{tang. } z'.$$

Constans $r : \text{tang. } z$ (ab r independens) dicatur i ; dum $y \rightsquigarrow 0$, est

$$\left(\frac{r}{y} = \frac{i \text{ tang. } z}{y} \right) \rightsquigarrow 1,$$

adeoque

$$\frac{y}{\text{tang. } z} \rightsquigarrow i.$$

Ex §. 29. fit

$$\text{tang. } z = \frac{1}{2} (Y - Y^{-1});$$

itaque

$$\frac{2y}{Y - Y^{-1}} \rightsquigarrow i,$$

seu (§. 24.)

$$\frac{2y I^{\frac{y}{i}}}{I^{\frac{2y}{i}} - 1} \rightsquigarrow i.$$

Notum autem est, expressionis istius (dum $y \rightsquigarrow 0$) limitem esse $\frac{i}{\log. \text{nat. } I}$; est ergo

$$\frac{i}{\log. \text{nat. } I} = i \quad \text{et} \quad I = e = 2.7182818 \dots,$$

quæ quantitas insignis hic quoque elucet. Si nempe abhinc i illam rectam denotet, cuius $I=e$ sit, erit $r=i \text{ tang. } z$. Erat autem (§. 21.) $\bigcirc y=2\pi r$; est igitur

$$\begin{aligned}\bigcirc y &= 2\pi i \text{ tang. } z = \pi i (Y - Y^{-1}) = \\ &= \pi i (e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}) = \frac{\pi y}{\log. \text{ nat. } Y} (Y - Y^{-1})\end{aligned}$$

(per §. 24.).

§. 31.

Fig. 16. Ad resolutionem omnium triangulorum rectangulorum rectilineorum trigonometricam (e qua omnium triangulorum resolutio in promptu est) in S 3 æquationes sufficiunt: nempe (a, b cathetos, c hypotenusam, et α, β angulos cathetis oppositos denotantibus) æquatio relationem exprimens *primo* inter a, c, α , *secundo* inter a, α, β , *tertio* inter a, b, c ; nimirum ex his *reliquae* 3 per eliminationem prodeunt.

I. Ex §§. 25. et 30. est

$$1 : \sin. \alpha = (C - C^{-1}) : (A - A^{-1}) = (e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}}) : (e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}});$$

(æquatio pro α, c, a).

II. Ex §. 27. sequitur (si $\beta m \parallel \gamma n$ sit)

$$\cos. \alpha : \sin. \beta = 1 : \sin. u;$$

ex §. 29. autem fit

$$1 : \sin. u = \frac{1}{2} (A + A^{-1});$$

itaque

$$\cos. \alpha : \sin. \beta = \frac{1}{2} (A + A^{-1}) = \frac{1}{2} (e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}});$$

(æquatio pro α, β, a).

III. Si $\alpha\alpha' \perp \beta\alpha\gamma$, atque $\beta\beta'$ et $\gamma\gamma'$ fuerint $\parallel \alpha\alpha'$, (§. 27.), atque $\beta'\alpha'\gamma' \perp \alpha\alpha'$; erit manifesto (uti in §. 27.)

$$\begin{aligned}\frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} &= \frac{1}{\sin. u} = \frac{1}{2} (A + A^{-1}), \\ \frac{\gamma\gamma'}{\alpha\alpha'} &= \frac{1}{2} (B + B^{-1}),\end{aligned}$$

ac

$$\frac{\beta\beta'}{\alpha\alpha'} = \frac{1}{2} (C + C^{-1});$$

consequ.

$$\frac{1}{2} (C + C^{-1}) = \frac{1}{2} (A + A^{-1}) \frac{1}{2} (B + B^{-1}),$$

sive

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2} (e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}) (e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}});$$

(æquatio pro a, b, c).Si $\gamma\alpha\delta = R$, et $\beta\delta \perp \alpha\delta$ sit; erit

$$\odot c : \odot a = 1 : \sin. \alpha,$$

et

$$\odot c : \odot (d = \beta\delta) = 1 : \cos. \alpha,$$

adeoque ($\odot x^2$ pro quovis x factum $\odot x$, $\odot x$ denotante) manifesto

$$\odot a^2 + \odot d^2 = \odot c^2.$$

Est vero (per §. 27. et II.)

$$\odot d = \odot b \cdot \frac{1}{2} (A + A^{-1}),$$

consequ.

$$(e^{\frac{c}{i}} - e^{-\frac{c}{i}})^2 = \frac{1}{4} (e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}})^2 (e^{\frac{b}{i}} - e^{-\frac{b}{i}})^2 + (e^{\frac{a}{i}} - e^{-\frac{a}{i}})^2;$$

alia æquatio pro a, b, c (cuius membrum secundum facile ad formam symmetricam seu invariabilem reducitur).

Denique ex

$$\frac{\cos. \alpha}{\sin. \beta} = \frac{1}{2} (A + A^{-1})$$

atque

$$\frac{\cos. \beta}{\sin. \alpha} = \frac{1}{2} (B + B^{-1})$$

fit (per III.)

$$\cot. \alpha \cot. \beta = \frac{1}{2} (e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}});$$

(æquatio pro α, β, c).

§. 32.

Restat adhuc modum *problemata* in *S* resolvendi breviter ostendere, quo (per exempla magis obvia) peracto, demum quid theoria hæcce præstet, candide dicetur.

Fig. 17. I. Sit \overline{ab} linea in plano, et $y=f(x)$ æquatio eius (pro coordinatis perpendicularibus), et quodvis incrementum ipsius z dicatur dz , atque incrementa ipsorum x , y , et areæ u , eidem dz respondentia, respective per dx , dy , du denotentur; sitque $bh \parallel cf$, et exprimatur (ex §§. 31. et 27.) $\frac{bh}{dx}$ per y , ac quæraturs ipsius $\frac{dy}{dx}$ *limes* tendente dx ad limitem 0, (quod, ubi eiusmodi limes quæritur, subintelligatur): innotescet exinde etiam limes ipsius $\frac{dy}{bh}$, adeoque tg. hbg ; eritque, (cum hbc manifesto nec $>$ nec $<$ adeoque $=R$ sit), *tangens* in b ipsius bg per y determinata.

II. Demonstrari potest, esse

$$\frac{dz^2}{dy^2 + bh^2} \sim 1.$$

Hinc *limes* ipsius $\frac{dz}{dx}$, et inde z integration (per x expressum) reperitur.

Et potest lineæ cuiusvis *in concreto datae* æquatio in *S* inveniri, ex. gr. ipsius L .

Si enim $a\overline{m}$ axis ipsius L sit; tum quævis $c\overline{b}$ ex $a\overline{m}$ secat L (cum per §. 19 quævis recta ex a præter $a\overline{m}$ ipsum L secet); est vero (si $b\overline{f}$ axis sit)

$$X = 1 : \sin. cbn \quad (\S. 28.),$$

atque

$$Y = \cot. \frac{1}{2} cbn \quad (\S. 29.),$$

unde fit

$$Y = X + \sqrt{X^2 - 1}$$

seu

$$e^{\frac{y}{x}} = e^{\frac{x}{i}} + \sqrt{e^{\frac{2x}{i}} - 1}$$

æquatio quæsitæ. Erit hinc

$$\frac{dy}{dx} \sim X(X^2-1)^{-\frac{1}{2}};$$

atqui

$$\frac{bh}{dx} = 1 : \sin. cbn = X;$$

adeoque

$$\frac{dy}{bh} \sim (X^2-1)^{-\frac{1}{2}};$$

$$1 + \frac{dy^2}{bh^2} \sim X^2(X^2-1)^{-1},$$

$$\frac{dz^2}{bh^2} \sim X^2(X^2-1)^{-1},$$

$$\frac{dz}{bh} \sim X(X^2-1)^{-\frac{1}{2}}$$

atque

$$\frac{dz}{dx} \sim X^2(X^2-1)^{-\frac{1}{2}};$$

unde per integrationem invenitur

$$z = i(X^2-1)^{\frac{1}{2}} = i \cot. cbn$$

(uti §. 30.).

III. Manifesto

$$\frac{du}{dx} \sim \frac{hfcbh}{dx},$$

quod (nonnisi ab y dependens) iam primum per y exprimendum est;
unde u integrando prodit.

Si $ab=p$, $ac=q$, et $cd=r$, atque $cabdc=s$ sit; poterit (uti in II.) Fig. 12.
ostendi esse

$$\frac{ds}{dq} \sim r,$$

quod

$$= \frac{1}{2} p (e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}}),$$

atque integrando

$$s = \frac{1}{2} pi (e^{\frac{q}{i}} - e^{-\frac{q}{i}}).$$

Potest hoc absque integratione quoque deduci.

Aequatione e. g. circuli (ex §. 31, III.), rectæ (ex §. 31, II.), sectionis conici (per præc.) expressis; poterunt areæ quoque his lineis clausæ exprimi.

Palam est, superficiem t ad figuram planam p (in distantia q) \parallel lam esse ad p in ratione potentiarum secundarum linearum homologarum, sive uti

$$\frac{1}{4} (e^{\frac{q}{i}} + e^{-\frac{q}{i}})^2 : 1.$$

Porro computum soliditatis pari modo tractatum, facile patet duas integrationes requirere (cum et differentiale ipsum hic nonnisi per integrationem determinetur); et ante omnia solidum a p et t ac complexu omnium rectorum ad p perpendicularium, fines ipsorum p , t connectentium, clausum quærendum esse. Reperitur solidum istud (tam per integrationem quam sine ea)

$$= \frac{1}{8} pi (e^{\frac{2q}{i}} - e^{-\frac{2q}{i}}) + \frac{1}{2} pq.$$

Superficies quoque corporum is S determinari possunt, nec non *curvaturæ*, *evolutæ*, *evolventesque* linearum qualiumvis \mathfrak{C} . Quod curvaturam attinet; ea in S aut ipsius L est, aut per radium circuli, aut *distantiam* curvæ ad rectam \parallel læ ab hac recta, determinatur; cum e præcedentibus facile ostendi possit, præter L , lineas circulares, ac rectæ \parallel las, nullas in plano alias lineas uniformes dari.

IV. Pro circulo est (uti in III.)

$$\frac{d \odot x}{dx} \sim \odot x,$$

unde (per §. 30.) integrando fit

$$\odot x = \pi i^2 (e^{\frac{x}{i}} - 2 + e^{-\frac{x}{i}}).$$

Fig. 9. V. Pro area $cabd\epsilon = u$ (linea L formi $ab = r$, huic \parallel la $c\delta = y$, ac rectis ac , $b\delta = x$ clausa) est

$$\frac{du}{dx} \sim y,$$

atque (§. 24.)

$$y = re^{-\frac{x}{i}};$$

adeoque (integrando)

$$u = ri(1 - e^{-\frac{x}{i}}).$$

Crescente x in infinitum, fiet in S $e^{-\frac{x}{i}} \sim 0$, adeoque $u \sim ri$. Per quantitatem ipsius $mabn$ in posterum limes iste intelligetur.

Simili modo invenitur, quod si p sit figura in F ; spatium a p et complexu axium e terminis ipsius p ductorum clausum $= \frac{1}{2}pi$ sit.

VI. Si angulus ad centrum segmenti x sphæræ sit $2u$, peripheria Fig. 10. circuli maximi sit p , et arcus fc (anguli u) $= x$; erit (§. 25.)

$$1 : \sin. u = p : \bigcirc bc,$$

et hinc

$$\bigcirc bc = p \sin. u.$$

Interim est

$$x = \frac{pu}{2\pi}, \quad \text{ac} \quad dx = \frac{pdu}{2\pi}.$$

Est porro

$$\frac{dz}{dx} \sim \bigcirc bc,$$

et hinc

$$\frac{dz}{du} \sim \frac{p^2}{2\pi} \sin. u,$$

unde (integrando)

$$z = \frac{\sin. \text{vers. } u}{2\pi} p^2.$$

Cogitetur F in quod p (per meditullium f segmenti transiens) cadit; planis \overline{fem} , \overline{cem} per af , ac ad F perpendiculariter positis, ipsumque in feg , ce secantibus; et considerentur L formis cd (ex c ad feg perpendicularis) nec non L formis cf ; erit (§. 20.)

$$cef = u,$$

et (§. 21.)

$$\frac{fd}{p} = \frac{\sin. \text{vers. } u}{2\pi},$$

adeoque

$$z = \text{fd} \cdot p.$$

Ast (§. 21.)

$$p = \pi \cdot \text{fd}g,$$

itaque

$$z = \pi \cdot \text{fd} \cdot \text{fd}g.$$

Est autem (§. 21.)

$$\text{fd} \cdot \text{fd}g = \text{fc} \cdot \text{fc};$$

consequ.

$$z = \pi \cdot \text{fc} \cdot \text{fc} = \odot \text{fc in } F.$$

Fig. 14. Sit iam $\text{bj} = \text{cj} = r$; erit (§. 30.)

$$2r = i(Y - Y^{-1}),$$

adeoque (§. 21.)

$$\odot 2r \text{ (in } F) = \pi i^2 (Y - Y^{-1})^2.$$

Est quoque (IV.)

$$\odot 2y = \pi i^2 (Y^2 - 2 + Y^{-2});$$

igitur $\odot 2r \text{ (in } F) = \odot 2y$, adeoque *et superficies z segmenti sphaerici aequatur circulo, chorda fc tanquam radio descripto.*

Hinc tota sphæræ superficies

$$= \odot \text{fg} = \text{fd}g \cdot p = \frac{p^2}{\pi},$$

suntque superficies sphaerarum, uti secundae potentiae peripheriarum earundem maximarum.

VII. Soliditas sphæræ radii x in S reperitur simili modo

$$= \frac{1}{2} \pi i^3 (X^2 - X^{-2}) - 2\pi i^2 x;$$

Fig. 12. superficies per revolutionem lineæ cd circa ab orta

$$= \frac{1}{2} \pi i p (Q^2 - Q^{-2}),$$

et corpus per cabdc descriptum

$$= \frac{1}{4} \pi i^2 p (Q - Q^{-1})^2.$$

Quomodo vero omnia a (IV.) hucusque tractata etiam absque integratione perfici possint, brevitatis studio supprimitur.

Demonstrari potest, *omnis expressionis literam i continentis* (adeoque *hypothesi*, quod *detur i*, innixæ) *limitem, crescente i in infinitum, exprimere quantitatem plane pro Σ* (adeoque pro *hypothesi nullius i*), *siquidem non eveniant aequationes identicae.* Cave vero intelligas putari, *systema ipsum variari* posse (quod omnino *in se et per se determinatum* est) sed tantum *hypothesein*, quod *successive* fieri potest, donec non ad absurdum perducti fuerimus. *Posito* igitur, quod in *tali* expressione *litera i* pro casu, si *S* esset reipsa, *illam* quantitatem unicam designet, cuius $I=e$ sit; si vero *revera Σ* fuerit, *limes dictus* loco expressionis accipi *cogitetur*: manifesto *omnes* expressiones ex *hypothesi realitatis* ipsius *S* oriundæ (hoc sensu) *absolute valent*, etsi *prorsus ignotum sit, num Σ sit, aut non sit.*

Ita e. g. ex expressione in §. 30. obtenta facile (et quidem *tam* differentiationis auxilio, quam *absque* eo) valor notus pro Σ prodit

$$\bigcirc x = 2\pi x;$$

ex I. (§. 31.) rite tractato, sequitur

$$1 : \sin. \alpha = c : a;$$

ex II. vero

$$\frac{\cos. \alpha}{\sin. \beta} = 1, \text{ adeoque } \alpha + \beta = R;$$

æquatio prima in III. fit *identica*, adeoque *valet* pro Σ , quamvis nihil in eo *determinet*; ex *secunda* autem fluit

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Aequationes notae fundamentales trigonometriae planae in Σ .

Porro inveniuntur (ex §. 32.) pro Σ area et corpus in III., utrumque

$$= pq;$$

ex IV.

$$\odot x = \pi x^2;$$

ex VII. sphæra radii x

$$= \frac{4}{3} \pi x^3$$

§.

Sunt quoque theoremata ad finem (VI.) enuntiata manifesto *inconditionate vera*.

§. 33.

Superest adhuc, quid theoria ista sibi velit, (in §. 32. promissum) exponere.

I. Num Σ' aut S aliquod *reipsa* sit, indecisum manet.

II. Omnia ex hypothesi *falsitatis* Ax. XI. deducta (semper sensu §. 32. intelligendo) *absolute* valent, adeoque *hoc sensu nulli hypothesi innituntur*. Habetur idcirco *trigonometria plana a priori*, in qua *solum* systema *verum ignotum* adeoque solummodo *absolutae* magnitudines expressionum incognitæ manent, per *unicum* vero casum notum, manifesto totum systema figeretur. Trigonometria sphærica autem in §. 26. absolute stabilitur. (Habeturque Geometria, Geometriæ planæ in Σ' prorsus analogæ in F).

III. Si *constaret* Σ' esse, nihil hoc respectu amplius incognitum esset; si vero *constaret non esse* Σ' , tunc (§. 31.) (e. g.) e lateribus x, y et angulo rectilineo ab iis intercepto, in *concreto datis* manifesto in se et per se impossibile esset triangulum absolute resolvere (i. e.) a priori determinare angulos ceteros et *rationem lateris tertii* ad duo data; nisi X, Y determinantur, ad quod *in concreto* haberi aliquod a oporteret, cuius A notum esset; atque tum *i unitas naturalis longitudinum* esset, (sicuti e est basis logarithmorum naturalium). Si existentia huius i constiterit; quomodo ad usum saltem quam exactissime construi possit, ostendetur.

IV. Sensu in I. et II. exposito patet, omnia in spatio methodo recentiorum Analytica (intra iustos fines valde laudanda) absolvi posse.

V. Denique lectoribus benevolis haud ingratum futurum est; pro casu illo, quodsi non Σ' sed S reipsa esset, circulo æquale rectilineum construi.

§. 34.

Ex δ ducitur $\delta m \parallel an$ modo sequente.

Fig. 12.

Fiat ex δ

$$\delta b \perp an;$$

erigatur e puncto quovis aliquo a rectæ \overline{ab}

$$ac \perp an \text{ (in } \delta ba),$$

et demittatur

$$\delta e \perp ac;$$

erit (§. 27.)

$$\odot ed : \odot ab = 1 : \sin. z,$$

siquidem fuerit $\delta m \parallel bn$.

Est vero $\sin. z$ non > 1 , adeoque ab non $> \delta e$. Descriptus igitur quadrans radio ipsi δe æquali ex a in bac, gaudebit puncto aliquo b vel o cum b δ communi. Priore in casu manifesto $z = R$; in posteriore vero erit (§. 25.)

$$(\odot ao = \odot ed) : \odot ab = 1 : \sin. aob,$$

adeoque

$$z = aob.$$

Si itaque fiat $z = aob$, erit $\delta m \parallel bn$.

§. 35.

Si fuerit S reipsa; *ducetur recta ad anguli acuti crus unum perpendicularis, quæ ad alterum \parallel sit, hoc modo.* Fig. 18.

Sit $am \perp bc$, et accipiatur $ab = ac$ tam parvum (per §. 19.), ut si ducatur $bn \parallel am$ (§. 34.), sit $abn >$ angulo dato. Ducatur porro $cp \parallel am$ (§. 34.), fiantque nbq , pcd utrumque æquale angulo dato; et bq , cd se mutuo secabunt. Secet enim bq , (quod *per constr.* in nbc cadit) ipsam cp in e; erit (propter $bn \triangle cp$) $ebc < ecb$, adeoque $ec < eb$. Sint

$$ef = ec, efr = ecd, \text{ et } fs \parallel ep;$$

cadet fs in bfr . Nam cum $bn \parallel cp$, adeoque $bn \parallel ep$, atque $bn \parallel fs$ sit;

erit (§. 14.)

$$\overline{fbn} + \overline{bfs} < 2R = \overline{fbn} + \overline{bfr};$$

itaque $\overline{bfs} < \overline{bfr}$. Quamobrem \overline{fr} secatur \overline{ep} , adeoque \overline{cd} quoque ipsam \overline{eq} in puncto aliquo δ .

Sit iam $\overline{dg} = \overline{dc}$, atque $\overline{dgt} = \overline{dcp} = \overline{gbn}$; erit (cum $\overline{cd} \simeq \overline{gd}$ sit)

$$\overline{bn} \simeq \overline{gt} \simeq \overline{cp}.$$

Si fuerit lineæ L formis ipsius \overline{bn} , punctum in \overline{bq} cadens f (§. 19.), et axis \overline{fl} ; erit

$$\overline{bn} \simeq \overline{fl},$$

adeoque

$$\overline{bfl} = \overline{bgt} = \overline{dcp};$$

sed etiam

$$\overline{fl} \simeq \overline{cp};$$

cadit ergo f manifesto in g , estque $\overline{gt} \parallel \overline{bn}$. Si vero h ipsum bg perpendiculariter bisecet; erit h $\parallel \overline{bn}$ constructum.

§. 36.

Fig. 10. Si fuerint data recta \overline{cp} et planum \overline{mab} , atque fiat $\overline{cb} \perp \overline{mab}$, (in \overline{bcp}) $\overline{bn} \perp \overline{bc}$, et $\overline{cq} \parallel \overline{bn}$ (§. 34.); *sectio ipsius \overline{cp}* (si hæc in \overline{bcq} cadat) *cum \overline{bn}* (in $\overline{c\overline{bn}}$), adeoque *cum \overline{mab}* reperitur. Et si fuerint data duo plana \overline{pcq} , \overline{mab} , et sit $\overline{cb} \perp \overline{mab}$, $\overline{cr} \perp \overline{pcq}$, atque (in \overline{bcr}) $\overline{bn} \perp \overline{bc}$, $\overline{cs} \perp \overline{cr}$; cadent \overline{bn} in \overline{mab} , et \overline{cs} in \overline{pcq} ; et sectione ipsarum \overline{bn} , \overline{cs} (si detur) reperiata, erit perpendicularis in \overline{pcq} per eandem ad \overline{cs} ducta manifesto *sectio ipsorum \overline{mab} , \overline{pcq}* .

§. 37.

Fig. 7. In $\overline{am} \parallel \overline{bn}$ reperitur tale a , ut sit $\overline{am} \simeq \overline{bn}$; si (per §. 34.) construatur extra \overline{nbm} $\overline{gt} \parallel \overline{bn}$, et fiant $\overline{bg} \perp \overline{gt}$, $\overline{gc} = \overline{gb}$, atque $\overline{cp} \parallel \overline{gt}$; ponaturque $\overline{tg\delta}$ ita, ut efficiat cum $\overline{tg\overline{b}}$ angulum illi æqualem, quem $\overline{pc\overline{a}}$ cum $\overline{pc\overline{b}}$ facit; atque quæeratur (per §. 36.) sectio $\overline{d\overline{q}}$ ipsorum $\overline{tg\delta}$, $\overline{nb\overline{a}}$; fiatque

$ba \perp \delta q$. Erit enimvero ob triangulorum L lineorum in F ipsius bn exortorum similitudinem (§. 21.) manifesto $\delta b = \delta a$, et $am \simeq bn$.

Facile hinc patet (L lineis per *solos terminos* datis) reperiri posse etiam *terminos* proportionis quartum ac medium, atque omnes constructiones geometricas, quæ in Σ in plano fiunt, hoc modo in F *absque XI. Axiomate* perfici posse. Ita e. g. $4R$ in quotvis partes æquales geometricè dividi potest, si sectionem istam in Σ perficere licet.

§. 38.

Si construatur (per §. 37.) e. g. $nbq = \frac{1}{3} R$, et fiat (per §. 35.) in S ad Fig. 14. bq perpendicularis $am \parallel bn$, atque determinetur (per §. 37.) $jm \simeq bn$; erit, si $ja = x$ sit, (§. 28.)

$$X = 1 : \sin. \frac{1}{3} R = 2,$$

atque x *geometricè* constructum.

Et potest nbq ita computari, ut ja ab i quovis dato minus discrepet, cum nonnisi $\sin. nbq = \frac{1}{e}$ esse debeat.

§. 39.

Si fuerint (in plano) pq et st , \parallel rectæ mn (§. 27.), et ab , cd sint per- Fig. 19. pendiculares ad mn æquales; manifesto est

$$\triangle dec = \triangle bea,$$

adeoque anguli (forsan mixtilinei) ecp , eat congruent, atque

$$ec = ea.$$

Si porro $cf = ag$, erit

$$\triangle acf = \triangle cag,$$

et utrumque *quadrilateri* $facg$ dimidium est. Si $facg$, $haqf$ duo eiusmodi quadrilatera fuerint ad ag , inter pq et st ; æqualitas eorum (uti apud EUCLIDEM), nec non triangulorum agc , agh eidem ag insistentium,

verticesque in \overline{pq} habentium, æqualitas patet. Est porro

$$\begin{aligned} \text{atque} \quad & acf = cag, \quad gcq = cga, \\ & acf + acg + gcq = 2R \\ (\S. 32.), \text{ adeoque etiam} \quad & cag + acg + cga = 2R; \end{aligned}$$

itaque in quovis eiusmodi triangulo acg summa trium angulorum $= 2R$.

Sive in ag (quæ $\parallel mn$) ceciderit autem *recta* ag , sive non; triangulorum *rectilineorum* agc , agh *tam ipsorum, quam summarum angulorum ipsorumdem, æqualitas* in aperto est.

§. 40.

Fig. 20. *Æqualia triangula abc , abd (abhinc rectilinea) uno latere æquali gaudentia, summas angulorum æquales habent.*

Nam dividat mn bifariam tam ac quam bc , et sit pq (per c) $\parallel mn$; cadet d in \overline{pq} . Nam si \overline{bd} ipsum \overline{mn} in puncto e , adeoque (§. 39.) ipsum \overline{pq} ad distantiam $ef = eb$ secet; erit

$$\triangle abc = \triangle abf,$$

adeoque et

$$\triangle abd = \triangle abf,$$

unde d in f cadit: si vero \overline{bd} ipsum \overline{mn} non secuerit, sit c punctum, ubi perpendicularis rectam ab bisecans ipsum \overline{pq} secat, atque $gs = ht$ ita, ut \overline{st} *productam* \overline{bd} in puncto aliquo f secet (quod fieri posse modo simili patet, ut §. 4.); sint porro $sl = sa$, $lo \parallel st$, atque o sectio ipsorum \overline{bf} et \overline{lo} ; esset tum (§. 39.)

$$\triangle abl = \triangle abo,$$

adeoque

$$\triangle abc > \triangle abd$$

(contra hyp.).

§. 41.

Aequalia triangula abc, def aequalibus angulorum summis gaudent. Fig. 21.

Nam secet mn tam ac quam bc, ita pq tam df quam fe bifariam, et sit rs || mn, atque to || pq; erit perpendicularis ag ad rs aut æqualis perpendiculari dh ad to, aut altera e. g. dh erit maior: in quovis casu \odot df e centro a cum gñ punctum aliquod f commune habet, eritque (§. 39.)

$$\triangle abf = \triangle abc = \triangle def.$$

Est vero $\triangle afb$ (per §. 40.) triangulo dfe, ac (per §. 39.) triangulo abc *aequiangulum*. Sunt igitur etiam triangula abc, def æquiangula.

In *S converti* quoque theorema potest. Sint enim triangula abc, def reciproce æquiangula, atque $\triangle bal = \triangle def$; erit (per præc.) alterum alteri, adeoque etiam $\triangle abc$ triangulo abl æquiangulum, et hinc manifesto

$$bcl + blc + cbl = 2R.$$

Atqui (ex §. 31.) cuiusvis trianguli angulorum summa in *S* est $< 2R$: cadit igitur l in c.

§. 42.

Si fuerit complementum summae angulorum trianguli abc ad 2R Fig. 22.

trianguli def vero
est

$$\triangle abc : \triangle def = u : v.$$

Nam si quodvis triangulorum acg, gch, hcb, dfh, ffe sit = *p*, atque

$$\triangle abc = mp, \quad \triangle def = np;$$

sitque *s* summa angulorum cuiusvis trianguli, quod = *p* est: erit manifesto

$$2R - u = ms - (m - 1)2R = 2R - m(2R - s),$$

et

$$u = m(2R - s),$$

et pariter

$$v = n(2R - s).$$

Est igitur

$$\triangle abc : \triangle def = m : n = u : v.$$

Ad casum incommensurabilitatis triangulorum abc , def quoque extendi facile patet.

Eodem modo demonstratur triangula in superficie sphærica esse uti *excessus* summarum angulorum eorundem supra $2R$. Si duo anguli trianguli sphærici recti fuerint, tertius z erit excessus dictus; est autem triangulum istud (peripheria maxima p dicta) manifesto

$$= \frac{z}{2\pi} - \frac{p^2}{2\pi} \quad (\S. 32. VI.);$$

consequenter quodvis triangulum, cuius angulorum excessus $= z$, est

$$= \frac{zp^2}{4\pi^2}.$$

§. 43.

Fig. 15. Iam *area* trianguli rectilinei in S per summam angulorum exprimetur.

Si ab crescat in infinitum; erit (§. 42.)

$$\triangle abc : (R - u - v)$$

constans. Est vero

$$\triangle abc \sim bacn \quad (\S. 32. V.)$$

et

$$R - u - v \sim z \quad (\S. I.);$$

adeoque

$$bacn : z = \triangle abc : (R - u - v) = bac'n' : z'.$$

Est porro manifesto

$$bdcn : bd'c'n' = r : r' = \text{tang. } z : \text{tang. } z' \quad (\S. 30.).$$

Pro $y' \sim 0$ autem est

$$\frac{bd'c'n'}{bac'n'} \sim 1,$$

nec non

$$\frac{\text{tang. } z'}{z'} \sim 1;$$

consequ.

$$bdcn : bacn = \text{tang. } z : z.$$

Erat vero (§. 32.)

$$bdcn = ri = i^2 \text{ tang. } z;$$

est igitur

$$bacn = zi^2.$$

Quovis triangulo, cuius angulorum summæ complementum ad $2R$ z est, in posterum breviter Δ dicto, erit idcirco

$$\Delta = zi^2.$$

Facile hinc liquet, quod si

Fig. 14.

$$or \parallel am \quad \text{et} \quad ro \parallel ab$$

fuerint; *area* inter or , st , bc comprehensa (quæ manifesto limes absolutus est *areæ* triangulorum rectilineorum sine fine crescentium, seu ipsius Δ pro $z \sim 2R$), sit

$$= \pi i^2 = \odot i \text{ in } F.$$

Limite isto per \square denotato, erit porro (per §. 30.)

Fig. 15.

$$\begin{aligned} \pi r^2 &= \text{tang. } z^2 \square = \odot r \text{ in } F \text{ (§. 21.)} \\ &= \odot s \text{ (per §. 32. VI.),} \end{aligned}$$

si chorda dc s dicatur. Si iam radio dato s , circuli in plano (sive radio L formi circuli in F) perpendiculariter bisecto, construatur (per §. 34.) $db \parallel \perp cn$; demissa perpendiculari ca ad db , et erecta perpendiculari cm ad ca ; habebitur z ; unde (per §. 37.) $\text{tang. } z^2$, radio L formi ad lubitum pro unitate assumpto, *geometrice determinari potest per duas lineas uniformes eiusdem curvaturæ* (quæ solis terminis datis, constructis axibus, manifesto tanquam rectæ commensurari, atque hoc respectu rectis æquivalentes spectari possunt).

Fig. 23 Porro construitur quadrilaterum ex. gr. regulare $=\square$, ut sequitur. Sit

$$abc = R, \quad bac = \frac{1}{2} R, \quad acb = \frac{1}{4} R, \quad \text{et } bc = x;$$

poterit X (ex §. 31. II.) per meras radices quadraticas exprimi, et (per §. 37.) construi: habitoque X , (per §. 38., sive etiam 29. et 35.) x ipsum determinari potest. Estque octuplum $\triangle abc$ manifesto $=\square$, atque *per hoc, circulus planus radii s , per figuram rectilineam, et lineas univoformes eiusdem generis (rectis, quoad comparisonem inter se, æquivalentes) geometrice quadratus; circulus F formis vero eodem modo complanatus: habeturque aut Axioma XI. Euclidis verum, aut quadratura circuli geometrica*; etsi hucusque indecisum manserit, quodnam ex his duobus revera locum habeat. Quoties $\text{tang. } z^2$ *vel* numerus integer *vel* fractio rationalis fuerit, cuius (ad simplicissimam formam reductæ) denominator *aut* numerus primus formæ $2^m + 1$ (cuius est etiam $2 = 2^0 + 1$) *aut* productum fuerit e quocunque primis huius formæ, quorum (ipsum 2, qui solus quotvis vicibus occurrere potest, excipiendo) quivis *semel* ut factor occurrit: per theoriam polygonorum ill. *GAUSS* (præclarum nostri imo omnis ævi inventum), etiam ipsi $\text{tang. } z^2 \square = \odot s$ (et nonnisi pro talibus valoribus ipsius z) figuram rectilineam æqualem constituere licet. Nam *divisio* ipsius \square (theoremate §. 42. facile ad quælibet polygonum extenso) manifesto *sectionem* ipsius $2R$ requirit, quam (ut ostendi potest) unice sub dicta conditione geometrice perficere licet. In omnibus autem talibus casibus præcedentia facile ad scopum perducent. Et potest quævis figura rectilinea in polygonum regulare n laterum geometrice converti, siquidem n sub formam *GAUSSianam* cadat.

Superesset denique, (ut res omni numero absolvatur), impossibilitatem (absque suppositione aliqua) decidendi, num Σ aut aliquod (et quodnam) S sit, demonstrare: quod tamen occasione magis idoneæ reservatur.

WOLFGANGI BOLYAI
ADDITAMENTUM AD APPENDICEM.

Denique *aliquid Auctori Appendicis proprium, coronidis instar*, addere fas sit: qui tamen ignoscat, si quid non acu eius tetigerim.

Res breviter in eo consistit: *formulae trigonometriae sphaericae*, in Appendice dicta ab axioma XI. Eucl. independenter demonstratæ, *cum formulis trigonometriae planae conveniunt, si* (modo statim dicendo) *latera trianguli sphaerici realia, rectilinei vero imaginaria accipiantur*; adeo ut quoad formulas trigonometricas planum ut sphaera imaginaria considerari possit, si pro reali illa accipiat, in qua $\sin. R=1$.

Pro casu, si axioma Eucl. verum non fuerit, demonstratur (Appendix §. 30.) dari certum i , pro quo ibidem dictum I est $=e$ (basi logarithmorum naturalium), atque pro hoc casu formulæ trigonometriæ planæ quoque demonstrantur (ibidem §. 31.); et quidem ita, ut (iuxta §. 32., post VII., ibidem) formulæ et pro casu veritatis axiomatis dicti valeant; nempe si supponendo, quod $i \rightarrow \infty$, limites valorum accipiantur; nimirum systema Euclideum est quasi limes systematis antieuclidei (pro $i \rightarrow \infty$). Ponatur, pro casu existentis i , unitas $=i$, atque conceptus *sinus cosinusque* extendatur et ad arcus imaginarios; ita ut arcum sive realem sive imaginarium denotet p , dicatur

$$\frac{1}{2} (e^{p\sqrt{-1}} + e^{-p\sqrt{-1}})$$

cosinus ipsius p , et

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}} (e^{p\sqrt{-1}} - e^{-p\sqrt{-1}})$$

dicatur sinus ipsius p .

Erit hinc pro q reali

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^q - e^{-q}) &= \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^{-q\sqrt{-1}\sqrt{-1}} - e^{q\sqrt{-1}\sqrt{-1}}) = \\ &= \sin.(-q\sqrt{-1}) = -\sin. q\sqrt{-1}\end{aligned}$$

Ita

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(e^q + e^{-q}) &= \frac{1}{2}(e^{-q\sqrt{-1}\sqrt{-1}} + e^{q\sqrt{-1}\sqrt{-1}}) = \\ &= \cos.(-q\sqrt{-1}) = \cos. q\sqrt{-1};\end{aligned}$$

si nempe et in circulo imaginario sinus negativi arcus sinui arcus positivi alioquin priori æqualis sit, præterquam quod negativus sit, atque cosinus arcus positivi et negativi (si alioquin æquales fuerint), sit idem.

In Appendice dicta §. 25. demonstratur absolute, id est ab axiomatico dicto independenter; quod in quovis triangulo rectilineo *sinus angulorum sint, uti peripheriae radiorum lateribus oppositis æqualium*; demonstraturque porro, pro casu existentis i , peripheriam radii y esse

$$= \pi i (e^{\frac{y}{i}} - e^{-\frac{y}{i}}),$$

quod pro $i=1$ fit

$$\pi(e^y - e^{-y}).$$

Itaque (§. 31. ibidem) pro triangulo rectilineo rectangulo, cuius catheti sunt a et b , hypotenusa c , et anguli lateribus a , b , c oppositi sunt α , β , π ; est (pro $i=1$)

in I.

$$1 : \sin. \alpha = \pi(e^c - e^{-c}) : \pi(e^a - e^{-a});$$

adeoque

$$1 : \sin. \alpha = \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^c - e^{-c}) : \frac{1}{2\sqrt{-1}}(e^a - e^{-a}).$$

Unde

$$1 : \sin. \alpha = -\sin. c\sqrt{-1} : -\sin. a\sqrt{-1}.$$

Et hinc

$$1 : \sin. \alpha = \sin. c\sqrt{-1} : \sin. a\sqrt{-1}.$$

In II. fit

$$\cos. \alpha : \sin. \beta = \cos. a \sqrt{-1} : 1.$$

In III. fit

$$\cos. c \sqrt{-1} = \cos. a \sqrt{-1} \cos. b \sqrt{-1}.$$

Quæ prouti omnes exinde promanantes formulæ trigonometriæ planæ, cum formulis trigonometriæ sphæricæ prorsus conveniunt; nisi quod si ex. gr. trianguli sphærici rectanguli quoque catheti angulique iis oppositi, hypotenusæque nomina eadem sortiantur, latera trianguli rectilinei per $\sqrt{-1}$ dividenda sint, ut formulæ pro sphæricis prodeant.

Nempe ex I. fiet

$$1 : \sin. \alpha = \sin. c : \sin. a,$$

ex II. fiet

$$1 : \cos. a = \sin. \beta : \cos. \alpha,$$

ex III. fiet

$$\cos. c = \cos. a \cos. b.$$

Quum ceteris supersedere liceat, et lectorem deductione (App. §. 32. post VII.) omissa offendi impediri que expertus sim: haud abs re erit ostendere, quomodo ex. gr. ex

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2} (e^{\frac{a}{i}} + e^{-\frac{a}{i}}) (e^{\frac{b}{i}} + e^{-\frac{b}{i}})$$

sequatur

$$c^2 = a^2 + b^2$$

(theorema Pythagoreum pro systemate Euclideo); verosimiliter Auctor quoque ita deduxit, et ceteræ quoque eodem modo sequuntur.

Est nempe potentiis ipsius e per series expressis

$$e^{\frac{k}{i}} = 1 + \frac{k}{i} + \frac{k^2}{2i^2} + \frac{k^3}{2 \cdot 3i^3} + \frac{k^4}{2 \cdot 3 \cdot 4i^4} + \dots$$

$$e^{-\frac{k}{i}} = 1 - \frac{k}{i} + \frac{k^2}{2i^2} - \frac{k^3}{2 \cdot 3i^3} + \frac{k^4}{2 \cdot 3 \cdot 4i^4} - \dots;$$

adeoque

$$\begin{aligned} e^{\frac{k}{i}} + e^{-\frac{k}{i}} &= 2 + \frac{k^2}{i^2} + \frac{k^4}{3 \cdot 4i^4} + \dots \\ &= 2 + \frac{k^2 + u}{i^2}, \end{aligned}$$

(si omnium terminorum post $\frac{k^2}{i^2}$ summa $\frac{u}{i^2}$ dicatur); estque $u \sim 0$, dum $i \sim \infty$. Nam multiplicentur omnes termini post $\frac{k^2}{i^2}$ per i^2 ; erit terminus primus $\frac{k^4}{3 \cdot 4 i^2}$, et quivis exponens $< \frac{k^2}{i^2}$; essetque etsi exponens ubique hic maneret, summa

$$\frac{k^4}{3 \cdot 4 i^2} : \left(1 - \frac{k^2}{i^2}\right) = \frac{k^4}{3 \cdot 4 (i^2 - k^2)},$$

quod manifesto ~ 0 , dum $i \sim \infty$.

Atque ex

$$e^{\frac{c}{i}} + e^{-\frac{c}{i}} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{a+b}{i}} + e^{-\frac{a+b}{i}} + e^{\frac{a-b}{i}} + e^{-\frac{a-b}{i}} \right)$$

sequitur (pro ω , v , λ adinstar u acceptis)

$$2 + \frac{c^2 + \omega}{i^2} = 1 + \frac{(a+b)^2 + v}{2i^2} + 1 + \frac{(a-b)^2 + \lambda}{2i^2}.$$

Atque hinc

$$c^2 = \frac{1}{2} (a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 + v + \lambda - 2\omega),$$

quod

$$\sim a^2 + b^2.$$

Scholion. Sphæræ illius, in qua sinus totus est $1=i$, radius est ordinata y lineæ L formis ipsi $i=1$ æqualis, ad axem per unam extremitatem ex altera perpendiculariter missa. Nempe *in superficie* (App. §. 21.) *F dicta, tota Geometria Euclidea valet, lineis L vicem rectarum subeuntibus*: atque pro radio L formi $=1$, qui sinus totus in F erit, peripheriæ eiusdem radius in plano erit plane dictum y ; quod ad sphæram imaginariam, ad quam planum (in systemate antieuclideo) revocatur, facile applicatur.

ADNOTATIONES EDITORUM.

In Ed. I. Appendicis literæ singulares puncta denotantes literis quæ dicuntur *cursivis* impressæ sunt, sed in libellis nobis relictis manu Ioannis Bolyai scriptis puncta literis qu. d. *fraktur* denotantur, quibus etiam pater eius usus est.

Pag. 1. post §. 15. in Ed. I. legitur :

└ denotet perpendiculare

∧ « angulum.

Nos hæc delevimus, quia pro signo └ usitatioe ⊥ utimur, vocabulum «angulum» autem ubique integrum scribimus.

Pag. 8. §. ultimo «frs» correximus in «hrs», ut et ipse auctor correxit in libello manu scripto, quo Appendicem lingua Germanica denuo pertractavit.

Pag. 10. §. ultimo §. 18. «○ha» emendavimus ex «○ht».

Pag. 14. extremæ §. 26. auctor ascripsit exemplari in bibliotheca Academicæ Hungaricæ asservato «cos. quoque necessarium». Videtur in editione quadam altera propositionem de cosinu demonstraturus fuisse, quamquam nihil hic maioris momenti vere desideratur. Revera considerationes, quibus in «Supplemento numeri 31351» Tom. II. Tentaminis ex

$$\sin. H : \sin. A = 1 : \sin. a$$

trigonometria sphærica integra deducitur, et in geometria absoluta valent.

Pag. 16. §. 3. Ex libello Germanico auctoris manu scripto «cq» scripsimus pro vitioso «c9» Editionis I.

Pag. 17. §. 5. «cn ||| ab, c'n' ||| ab» scripsimus pro «cn, c'n' ||| ab» Ed. I.

Pag. 20. §. 8. «et 27» Ioannes Bolyai ipse ascripsit in exemplari Academix.

Pag. 22. §. 4. a calce «§. 30.» scripsimus pro «§. 29.» Ed. I.

Pag. 35. In hoc Additamento, quod pagg. 380—383 Tom. II. Ed. I. Tentaminis continetur, delevimus mentionem de paginis huius operis factam, in quibus solum theorematum omnibus nota continentur. Articulum vero secundum in hunc locum reiecimus:

«Pro v positivo radicem positivam ipsius $-v^2$ per $+v$ denotat, et negativam per $-v$, sed ob defectum signorum (quum vix hæc duo quadamtenus prodierunt), radix positiva ipsius -1 per $\sqrt{-1}$ et negativa per $-\sqrt{-1}$ denotabitur».

Ibidem §. 3. Post «Appendicis» delevimus «in tomo primo».

Ibidem §. 11. Initium articuli huius in Ed. I. sic legitur:

«Nimirum de axioma Euclideo dictum in tomo primo satis superque est: pro casu, si verum non fuerit &».

Pag. 38. §. 2. «multiplicentur» scripsimus pro erroneo «dividuntur».

Ibidem §. 8. Latus sinistrum formulæ in Ed. I. deest.

Tab. I. Fig. 1-4.

Tab. II. Fig. 3-7.

Tab. III. Fig. 8-10.

Tab. IV. Fig. 11-13.

Tab. V. Fig. 14-15.

Tab. VI. Fig. 16-18.

Tab. VII. Fig. 19-23.

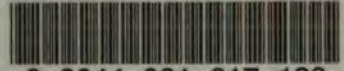








Math 5858.32
Ioannis Bolyai de Bolya Appendix sc
Cabot Science 003344415



3 2044 091 917 138